

第十五届全国大学生数学竞赛暨第十三届广东省大学生数学  
竞赛试卷

(民办本科类, 2023年11月11日)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150分钟 满分: 100分

条形码黏贴处

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、填空题 (本题满分 30 分, 每小题 6 分)

- (1) 极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1^n + 2^n + \dots + 100^n)^{\frac{1}{n}}$  的值为\_\_\_\_\_.
- (2) 设函数  $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2)(e^{3x} - 3)(e^{4x} - 4)$ , 则  $f'(0) =$ \_\_\_\_\_.
- (3) 设  $f(x) = |x(1-x)|$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , 则曲线  $y = f(x)$  的拐点为\_\_\_\_\_.
- (4) 若常数  $a$  和  $b$  使得函数  $f(x) = \begin{cases} x \sin x + e^x, & x > 0 \\ ax + b, & x \leq 0 \end{cases}$  是  $(-\infty, +\infty)$  上的可导函数, 则  $a =$ \_\_\_\_\_ ;  $b =$ \_\_\_\_\_.
- (5) 积分  $\int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$  的值为\_\_\_\_\_.

姓名: \_\_\_\_\_ 身份证号: \_\_\_\_\_ 学校: \_\_\_\_\_ 考场: \_\_\_\_\_ 座号: \_\_\_\_\_

线  
—  
封  
—  
密

二、(本题满分 14 分) 设  $0 < a_1 < \pi$ ,  $a_{n+1} = (2\sqrt{a_n} - \sin a_n) \sin a_n$ , 求数列  $\{a_n\}$  的极限.

三、(本题满分 14 分) 设  $p > 0$ ，试判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p + (-1)^{n-1}}$  的敛散性.

四、(本题满分 14 分) 设曲线  $C$  的方程可表示为  $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = 4t - t^2, \end{cases} (t \geq 0).$

(I) 过点  $(-1, 0)$  作曲线  $C$  的切线，求切点  $(x_0, y_0)$ ，并写出切线的方程；

(II) 求此切线与  $C$ （对应于  $x \leq x_0$  的部分）及  $x$  轴所围成的平面图形的面积.

姓名：\_\_\_\_\_ 身份证号：\_\_\_\_\_ 学校：\_\_\_\_\_ 考场：\_\_\_\_\_ 座号：\_\_\_\_\_

.....  
密——封——线  
.....

五、(本题满分 14 分) 设  $0 < a < b < \pi$ ，证明不等式：
$$\frac{b \sin b + 2 \cos b + \pi b}{a \sin a + 2 \cos a + \pi a} > 1.$$

六、（本题满分 14 分）求在  $(-\infty, +\infty)$  上连续且满足方程  $f(x) = x^2 + 2 \int_0^x tf(t)dt$  的所有函数  $f(x)$ 。